

Table des matières

Introduction	3
1 Introduction aux équations aux dérivées partielles	4
1.1 Définitions générales	4
1.2 EDP linéaires du 1 ^{er} ordre	5
1.3 EDP linéaires du 2 nd ordre	6
1.4 Classification des EDP linéaires du 2 nd ordre, à coefficients constants . .	6
1.5 Exemples	7
1.6 Théorème (Forme bilinéaire)	8
1.7 Séparation simple des variables pour EDP linéaire	10
1.7.1 La forme $T(x, t) = \varphi(x) + \psi(t)$	10
1.7.2 la forme $T(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$	11
2 Séparation des variables pour EDP non linéaire	16
2.1 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi(x) + \psi(t)$	16
2.2 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi(x)\psi(t)$	21
2.3 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \dots$. . .	25
2.3.1 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi(t) + \psi(t)\theta(x)$	25

2.3.2	La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi(x) \psi(t) + \theta(x)$	29
3	Séparation des variables généralisée pour EDP non linéaire	31
3.1	La forme $T(x, t) = g(x, t) F(u) + h(x, t)$	31
3.1.1	La forme $T(x, t) = g(t) F(u) + h(t)$, $u = \varphi(x) \theta(t) + \psi(t)$. .	31
3.1.2	La forme $T(x, t) = g(x) F(u) + h(x)$, $u = \varphi(x) \theta(t) + \psi(x)$.	34
	Conclusion	36

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDPs.

Il existe un grand nombre de problèmes de l'ingénieur qui sont formulés sous la forme d'une EDP à résoudre, avec des conditions initiales et des conditions limites. Assez peu de problèmes concrets ont une solution analytique. Cela est essentiellement dû aux non-linéarités qui interviennent dans la plupart des problèmes intéressants ainsi que de la complexité géométrique des domaines concernés dans la pratique (un avion, une voiture...).

Le mémoire contient trois chapitres, le premier chapitre est une introduction aux équations aux dérivées partielles, dans le deuxième chapitre on va introduire une méthode qui permet de résoudre des EDPs non linéaires dans certains cas simples. La première chose sera de bien comprendre les limitations de la méthode de séparation des variables, i.e. il s'agit d'être capable de déterminer quand cette méthode est applicable.

Le dernier chapitre contient deux formes de séparation des variables généralisée pour EDP non linéaire.

La méthode de séparation des variables est en fait assez peu utile en pratique car elle ne permet pas de trouver des solutions que dans des cas simples et pour des géométries simples.

Néanmoins, elle est d'une grande utilité pour comprendre la nature des solutions d'EDPs très courantes en pratique. C'est essentiellement pour cette raison qu'elle sera étudiée.

Chapitre 1

Introduction aux équations aux dérivées partielles

1.1 Définitions générales

On donne tout d'abord quelques définitions et généralités sur les équations aux dérivées partielles .

Définition 1.1.1 Soit une variable T (l'inconnue) dépendant de m variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_m

Toute relation entre T, x_j ($j = 1, \dots, m$) et des dérivées partielles de T par rapport aux x_j ,

$$F \left(T, x_1, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n T}{\partial x_1^n}, \dots \right) = 0$$

constitue une équation aux dérivées partielles (en abrégé : une EDP).

Définition 1.1.2 On appelle ordre d'une EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP.

Une EDP est dite d'ordre n quand la dérivée partielle d'ordre le plus élevé qu'elle contient est d'ordre n .

Définition 1.1.3 Une EDP est dite linéaire quand elle l'est par rapport à T et à toutes ses dérivées partielles.

Si T et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "à la puissance 1" dans l'EDP, celle-ci est dite linéaire.

Définition 1.1.4 Des EDPs non linéaires, c'est-à-dire que la relation entre les dérivées partielles est non linéaire. Par exemple elle fait intervenir le carré d'une dérivée ou bien on multiplie par une fonction qui dépend elle-même de la solution .

En voici un exemple : l'équation de Burgers

$$\frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

1.2 EDP linéaires du 1^{er} ordre

$$A(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} + C(x, y)T = D(x, y)$$

Est la forme la plus générale pour une EDP $\left\{ \begin{array}{l} \text{linéaire} \\ 1^{er} \text{ordre} \end{array} \right.$

Où A, B, C et D sont, au plus, fonctions de x et y . L'EDP est homogène lorsque $D = 0$.

1.3 EDP linéaires du 2nd ordre

L'EDP linéaire du 2^{ème} ordre et à deux variables indépendantes x et y à la forme générale

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D \frac{\partial T}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial y} + GT = F$$

Où A, B, C, D, E, G et F sont, au plus, fonctions de x et y . L'EDP est homogène lorsque $F = 0$.

1.4 Classification des EDP linéaires du 2nd ordre, à coefficients constants

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D \frac{\partial T}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial y} + FT + G = 0$$

Les trois premiers termes correspondent à la partie principale A, B, \dots, G sont des constantes.

Le type de l'EDP dépend du signe de $B^2 - 4AC$.

Classification :

Si $B^2 - 4AC > 0$, alors l'EDP est dite hyperbolique.

Si $B^2 - 4AC = 0$, alors l'EDP est dite parabolique.

Si $B^2 - 4AC < 0$, alors l'EDP est dite elliptique.

Exemple

$$(i) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec } c > 0$$

$B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

$$(ii) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + d \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec } d > 0$$

$B^2 - 4AC = 0$. Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.

$$(iii) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$B^2 - 4AC = -4 < 0$. Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

$$(iv) \quad y \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{:Equation de Tricomi.}$$

$y > 0 \Rightarrow$ l'EDP est hyperbolique.

$y = 0 \Rightarrow$ l'EDP est parabolique.

$y < 0 \Rightarrow$ l'EDP est elliptique.

1.5 Exemples

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Est une EDP d'ordre 2, linéaire (même plus : à coefficients constants) et homogène.
C'est l'équation de Laplace.

$$x \frac{\partial T}{\partial x} + y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{T^2}{T_0} = 0 \quad (2)$$

Est une EDP d'ordre 1, non linéaire et homogène.

$$C \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Avec c constant, (3) est une EDP d'ordre 1, linéaire (à coefficient constant) et homogène. C'est l'équation de transport.

$$T \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Est une EDP d'ordre 1, non linéaire et homogène. C'est l'équation de Burgers.

Elle peut aussi s'écrire sous forme conservative

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T^2}{2} \right) + \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

1.6 Théorème (Forme bilinéaire)

Soit la forme bilinéaire

$$B(f, g) = \sum_{i=1}^n f_i(x) g_i(t)$$

Si $B(f, g) = 0$ alors il existe des constants A_i , ($i = 2, 3, \dots, n$) tel que :

$$\begin{cases} f_i(x) = \sum_{i=2}^n A_i f_i(x) \\ g_k(t) = -A_k g_1(t), \quad (k = 2, 3, \dots, n) \end{cases}$$

Preuve

Par récurrence

$n = 2$

$$f_1(x) g_1(t) + f_2(x) g_2(x) = 0$$

$$\implies \frac{f_1}{f_2} = -\frac{g_1}{g_2} = A_2$$

$$\implies f_1 = A_2 f_2, \quad g_1 = -A_2 g_2$$

Supposons vrai pour $n - 1$ et je démontre pour n

$$\sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(t) = 0$$

Je dvisé par $f_n g_n$

$$\frac{f_1 g_1}{f_n g_n} + \frac{f_2 g_2}{f_n g_n} + \dots + \frac{f_{n-1} g_{n-1}}{f_n g_n} + 1 = 0$$

Je dérive par rapport à x

$$\left(\frac{f_1}{f_n}\right)' \frac{g_1}{g_n} + \left(\frac{f_2}{f_n}\right)' \frac{g_2}{g_n} + \dots + \left(\frac{f_{n-1}}{f_n}\right)' \frac{g_{n-1}}{g_n} = 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{f_1}{f_n}\right)' = \sum_{i=2}^{n-1} A_i \left(\frac{f_i}{f_n}\right)' \\ \frac{g_k}{g_n} = -A_k \frac{g_1}{g_n} \quad (k = 2, 3, \dots, n-1) \end{cases}$$

Je vais intègre par rapport à x

$$\frac{f_1}{f_n} = \sum_{i=2}^{n-1} A_i \frac{f_i}{f_n} + A_n \quad (A_n = \text{constante d'intégration})$$

$$\left(\frac{f_1}{f_n} = \sum_{i=2}^{n-1} A_i \frac{f_i}{f_n} + A_n\right)(f_n) \implies f_1 = \sum_{i=2}^{n-1} A_i f_i + A_n f_n$$

$$\implies f_1 = \sum_{i=2}^n A_i f_i.$$

$$\left(\frac{g_k}{g_n} = -A_k \frac{g_1}{g_n}\right)(g_n) \implies g_k = -A_k g_1 \quad (k = 2, 3, \dots, n-1)$$

reste à démontrer que

$$g_n = -A_n g_1$$

$$\sum_{i=1}^n f_i(x)g_i(t) = 0 \implies f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_n g_n = 0$$

$$\left(\sum_{i=2}^n A_i f_i\right) g_1 - A_2 f_2 g_2 - A_3 f_3 g_3 - \dots - A_{n-1} f_{n-1} g_1 + f_n g_n = 0$$

$$\implies A_n f_n g_1 + f_n g_n = 0$$

$$\implies g_n = -A_n g_1$$

1.7 Séparation simple des variables pour EDP linéaire

Une équation aux dérivées partielles peut admettre des solutions particulières qui sont des produits des fonctions d'une variable. Si l'équation est linéaire, une somme de telles solutions particulières est encore une solution.

1.7.1 La forme $T(x, t) = \varphi(x) + \psi(t)$

Exemple 1.7.1.1

Soit l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{avec } a > 0 \quad \text{et} \quad T = T(x, t) \quad (1)$$

La solution particulière sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x) + \psi(t) \quad (2)$$

On remplace (2) dans (1) on obtient

$$\psi'(t) = a\varphi''(x)$$

Et il existe une constante k telle que

$$\begin{cases} \psi'(t) = k \implies \psi(t) = kt + c_1 \\ a\varphi''(x) = k \implies \varphi(x) = \frac{k}{2a}x^2 + c_2x + c_3 \end{cases} \quad k, c_1, c_2 \text{ et } c_3 \text{ sont des constantes}$$

$$\frac{k}{2a} = A \implies k = 2aA$$

$$T(x, t) = Ax^2 + c_2x + c_3 + 2aAt + c_1$$

Si $c_2 = 0$.

La solution obtenue comme

$$T(x, t) = A(x^2 + 2at) + B, \quad B = c_1 + c_3$$

1.7.2 la forme $T(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$

Exemple.1.7.2.1

Soit l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{avec } T = T(x, t) \quad (3)$$

La solution particulière sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x)\psi(t) \quad (4)$$

On remplace (4) dans (3) on obtient

$$\varphi(x)\psi''(t) = c^2\varphi''(x)\psi(t)$$

Et il existe une constante λ telle que

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \lambda \\ \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda \end{cases} \quad \lambda = \text{constante}$$

On a trois cas possibles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x) = ax + b & \text{si } \lambda = 0 \\ \varphi(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{si } \lambda > 0 \\ \varphi(x) = c_3 \cos \alpha x + c_4 \sin \alpha x & \text{si } \lambda < 0, \quad \lambda = -\alpha^2 \end{array} \right.$$

telle que a, b, c_1, c_2, c_3 , et c_4 sont des constantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi(t) = At + B & \text{si } \lambda = 0 \\ \psi(t) = c_5 e^{c\sqrt{\lambda}t} + c_6 e^{-c\sqrt{\lambda}t} & \text{si } \lambda > 0 \\ \psi(t) = k_1 \cos \alpha ct + k_2 \sin \alpha ct & \text{si } \lambda < 0, \quad \lambda = -\alpha^2 \end{array} \right.$$

telle que A, B, c_5, c_6, k_1 , et k_2 sont des constantes.

La solution obtenue comme

$$T(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} (ax + b)(At + B) & \text{si } \lambda = 0 \\ (c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})(c_5 e^{c\sqrt{\lambda}t} + c_6 e^{-c\sqrt{\lambda}t}) & \text{si } \lambda > 0 \\ (c_3 \cos \alpha x + c_4 \sin \alpha x)(k_1 \cos \alpha ct + k_2 \sin \alpha ct) & \text{si } \lambda < 0, \lambda = -\alpha^2 \end{array} \right.$$

Exemple 1.7.2.2

Soit l'équation de chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{avec } T = T(x, t) \quad (5)$$

La solution particulière sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x)\psi(t) \quad (6)$$

On remplace (6) dans (5) on obtient

$$\psi'(t)\varphi(x) = \varphi''(x)\psi'(t)$$

Et il existe une constante k telle que

$$\begin{cases} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = k \\ \frac{\psi'(t)}{\psi'(t)} = k \end{cases} \quad k = \text{constante}$$

On a trois cas possibles :

$$\begin{cases} \varphi(x) = ax + b & \text{si } k = 0 \\ \varphi(x) = k_1 e^{\sqrt{k}x} + k_2 e^{-\sqrt{k}x} & \text{si } k > 0 \\ \varphi(x) = k_4 \cos \alpha x + k_5 \sin \alpha x & \text{si } k < 0 \quad k = -\alpha^2 \end{cases}$$

telle que a, b, k_1, k_2, k_4 et k_5 sont des constantes.

$$\begin{cases} \psi(t) = A & \text{si } k = 0 \\ \psi(t) = B e^{kt} & \text{si } k > 0 \\ \psi(t) = B e^{-\alpha^2 t} & \text{si } k < 0 \quad k = -\alpha^2 \end{cases}$$

telle que A et B deux constantes.

La solution obtenue comme

$$T(x, t) = \begin{cases} A(ax + b) & \text{si } k = 0 \\ B e^{kt} (k_1 e^{\sqrt{k}x} + k_2 e^{-\sqrt{k}x}) & \text{si } k > 0 \\ B e^{-\alpha^2 t} (k_4 \cos \alpha x + k_5 \sin \alpha x) & \text{si } k = -\alpha^2 \end{cases}$$

Exemple 1.7.2.3

Soit l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

La solution particulière sous forme

$$T(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \quad (8)$$

On remplace (8) dans (7) on obtient

$$\varphi''(x)\psi(y) + \varphi(x)\psi''(y) = 0$$

Et il existe une constante λ telle que

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)}$$

On a trois cas possibles :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x) = ax + b & \text{si } \lambda = 0 \\ \varphi(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{si } \lambda > 0 \\ \varphi(x) = a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(-\sqrt{-\lambda}x) & \text{si } \lambda < 0 \end{array} \right.$$

telle que a et b deux constantes.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi(y) = Ay + B & \text{si } \lambda = 0 \\ \psi(y) = A \cos(\sqrt{-\lambda}y) + B \sin(-\sqrt{-\lambda}y) & \lambda > 0 \\ \psi(y) = Ae^{\sqrt{\lambda}y} + Be^{-\sqrt{\lambda}y} & \lambda < 0 \end{array} \right.$$

telle que A et B deux constantes

$$T(x, t) = \begin{cases} (ax + b)(Ay + B) & \text{si } \lambda = 0 \\ \left(ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} \right) \left(A \cos(\sqrt{-\lambda}y) + B \sin(-\sqrt{-\lambda}y) \right) & \text{si } \lambda > 0 \\ \left(a \cos(\sqrt{-\lambda}x) + b \sin(-\sqrt{-\lambda}x) \right) \left(Ae^{\sqrt{\lambda}y} + Be^{-\sqrt{\lambda}y} \right) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Chapitre 2

Séparation des variables pour EDP non linéaire

Le but de ce chapitre est de chercher des formes de solutions "séparation des variables" pour résoudre des EDPs non linéaires dans certains cas simples. On commence par des cas simples et on essaye de généraliser ensuite.

Les équation aux dérivées partielles non linéaires admettent des solutions exactes de la forme $T(x, t) = F(u)$ tel que $F(u)$ est une fonction.

2.1 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi(x) + \psi(t)$

Exemple 2.1.1

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda x} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3)$$

Admet une solution sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x) + \psi(t) \quad (4)$$

En remplaçant (4) dans (3) on obtient

$$\psi''_{tt} = a \left(e^{\lambda(\varphi(x) + \psi(t))} \varphi'_x \right)'_x$$

Divisé par $e^{\lambda\psi}$ on obtient

$$e^{-\lambda\psi} \psi''_{tt} = a \left(e^{\lambda\varphi} \varphi'_x \right)'_x$$

Et il existe une constante k telle que

$$\begin{cases} e^{-\lambda\psi} \psi''_{tt} = k \\ a \left(e^{\lambda\varphi} \varphi'_x \right)'_x = k \end{cases} \quad k = \text{constante}$$

On résoud L'EDO on obtient la solution de (3) de forme (4)

Exemple 2.1.2

Soit l'équation non linéaire

$$f(t) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 + g(x) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 = a(t) + b(x) \quad (5)$$

Admet la solution sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x) + \psi(t) \quad (6)$$

En remplaçant (6) dans (5) on obtient

$$f(t) \left[\psi'(t) \right]^2 + g(x) \left[\varphi'(x) \right]^2 = a(t) + b(x)$$

Alors

$$f(t) \left[\psi'(t) \right]^2 - a(t) = g(x) \left[\varphi'(x) \right]^2 - b(x)$$

Et il existe une constante α telle que

$$\begin{cases} f(t) \left[\psi'(t) \right]^2 - a(t) = \alpha \\ g(x) \left[\varphi'(x) \right]^2 - b(x) = \alpha \end{cases} \quad \alpha = \text{constante}$$

La solution est obtenue comme

$$T(x, t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{a(\xi) + \alpha}{f(\xi)}} d\xi + \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{b(\eta) + \alpha}{g(\eta)}} d\eta + \beta$$

Exemple 2.1.3

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta T) - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta T) = v \Delta \Delta T, \quad \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5)$$

La solution particulière sous forme

$$T(x, t) = f(x) + g(y) \quad (6)$$

En remplaçant (6) dans (5) et on obtient

$$g'_y f'''_{xxx} - f'_x g'''_{yyy} = v f''''_{xxx} + v g''''_{yyy}.$$

On dérive par rapport à x et y

$$g''_{yy} f''''_{xxx} - f''_{xx} g''''_{yyy} = 0.$$

Et il existe une constante α telle que

$$\begin{cases} f''''_{xxxx} = \alpha f''_{xx} \\ g''''_{yyyy} = \alpha g''_{yy} \end{cases}$$

On a trois cas possibles :

$$\begin{cases} f(x) = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3 & \text{si } \alpha = 0 \\ f(x) = A_1 + A_2x + A_3e^{\lambda x} + A_4e^{-\lambda x} & \text{si } \alpha = \lambda^2 > 0 \\ f(x) = A_1 + A_2x + A_3 \cos(\lambda x) + A_4 \sin(\lambda x) & \text{si } \alpha = -\lambda^2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y) = B_1 + B_2y + B_3y^2 + B_4y^3 & \text{si } \alpha = 0 \\ g(y) = B_1 + B_2y + B_3e^{\lambda y} + B_4e^{-\lambda y} & \text{si } \alpha = \lambda^2 > 0 \\ g(y) = B_1 + B_2y + B_3 \cos(\lambda y) + B_4 \sin(\lambda y) & \text{si } \alpha = -\lambda^2 < 0 \end{cases}$$

telle que $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3$ et B_4 sont des constantes.

La solution est obtenue comme

$$T(x, y) = \begin{cases} A_4x^3 + A_3x^2 + A_2x + d + B_4y^3 + B_3y^2 + B_2y & \text{si } \alpha = 0 \\ A_4e^{-\lambda x} + A_3e^{\lambda x} + A_2x + d + B_4e^{-\lambda y} + B_3e^{\lambda y} + B_2y & \text{si } \alpha = \lambda^2 > 0 \\ A_4 \sin(\lambda x) + A_3 \cos(\lambda x) + A_2x + d + B_4 \sin(\lambda y) + B_3 \cos(\lambda y) + B_2y & \text{si } \alpha = -\lambda^2 < 0 \end{cases}$$

$$A_1 + B_1 = d$$

Exemple 2.1.4

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 \quad (7)$$

La forme de solution

$$T(x, t) = \frac{a}{b} \ln u, \quad u = \varphi(x) + \psi(t) \quad (8)$$

On calcule les dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{a}{b} \frac{\psi'_t}{\varphi(x) + \psi(t)} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{a}{b} \left(\frac{\varphi'_x}{\varphi(x) + \psi(t)} \right) \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{a}{b} \left(\frac{\varphi''_{xx}(\varphi(x) + \psi(t)) - (\varphi'_x)^2}{(\varphi(x) + \psi(t))^2} \right) \end{array} \right.$$

On a alors

$$\frac{a}{b} \left(\frac{\psi'_t}{\varphi(x) + \psi(t)} \right) = \frac{a^2}{b} \left(\frac{\varphi''_{xx}(\varphi(x) + \psi(t)) - (\varphi'_x)^2}{(\varphi(x) + \psi(t))^2} \right) + \frac{a^2}{b} \left(\frac{\varphi'_x}{\varphi(x) + \psi(t)} \right)^2$$

On obtient

$$\psi'_t = a \varphi''_{xx}$$

Et il existe une constante λ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi'_t = \lambda \\ a \varphi''_{xx} = \lambda \end{array} \right.$$

On a deux cas possibles

$$\left\{ \begin{array}{ll} \psi(t) = A & \text{si } \lambda = 0 \\ \psi(t) = At + B & \text{si } \lambda \neq 0 \end{array} \right.$$

telle que A et B deux constantes.

$$\begin{cases} \varphi(x) = ax + b & \text{si } \lambda = 0 \\ \varphi(x) = \frac{\lambda}{2a}x^2 + bx + c & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

telle que a, b , et c sont des constantes..

La solution est obtenue comme

$$T(x, t) = \begin{cases} \frac{a}{b} \ln(A + cx + d) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{a}{b} \ln(At + B + \frac{\lambda}{2a}x^2 + bx + c) & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

2.2 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi(x) \psi(t)$

Exemple 2.2.1

Soit l'équation de la chaleur non linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(T^k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

Admet une solution exacte sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x) \psi(t) \quad (2)$$

On remplace (2) dans (1) on obtient

$$\varphi \psi'_t = a \psi^{k+1} \left(\varphi^k \varphi'_x \right)'_x$$

En divisant par $\varphi \psi^{k+1}$ on obtient

$$a \frac{\left(\varphi^k \varphi'_x \right)'_x}{\varphi} = \frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}}$$

La fonction de gauche dépend uniquement de x et celle de droite uniquement de t , on peut alors dire qu'il existe un réel c tel que.

$$\begin{cases} a \frac{(\varphi^k \varphi'_x)' }{\varphi'_t} = c \\ \frac{\psi'_t}{\psi^{k+1}} = c \end{cases}$$

On résoud l'EDO on obtient la solution de (1) de la forme (2)

Exemple 2.2.2

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = f(t) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - aT^3 \quad (3)$$

Admet une solution sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x) \psi(t) \quad (4)$$

On remplace (4) dans (3) on obtient

$$\varphi(x) \psi'(t) = f(t) [\varphi''(x) \psi(t)] + \varphi(x) \psi(t) [\varphi'(x) \psi(t)]^2 - a [\varphi(x) \psi(t)]^3$$

En divisant par $f(t) \varphi(x) \psi(t)$ on obtient

$$\frac{\psi'(t)}{f(t) \psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\psi(t))^2}{f(t)} \left[\left(\varphi'_x(x) \right)^2 - a(\varphi(x))^2 \right]$$

On a deux cas

1. Si $a > 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= c_1 \exp(x\sqrt{a}) + c_2 \exp(-x\sqrt{a}) \\ \psi(t) &= e^F \left(c_3 + 8ac_1c_2 \int e^{2F} dt \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad F = a \int f(t) dt.\end{aligned}$$

2. Si $a < 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= C_1 \sin(x\sqrt{-a}) + C_2 \cos(x\sqrt{-a}) \\ \psi(t) &= e^F [C_3 + 2a(C_1^2 + C_2^2) \int e^{2F} dt]^{-\frac{1}{2}}, \quad F = a \int f(t) dt.\end{aligned}$$

telle que c_1, c_2 et c_3 sont des constantes

En fin on a

$$T(x, t) = \begin{cases} (c_1 \exp(x\sqrt{a}) + c_2 \exp(-x\sqrt{a})) \left(e^F [c_3 + 2a(c_1^2 + c_2^2) \int e^{2F} dt]^{-\frac{1}{2}} \right) & \text{si } a > 0 \\ (c_1 \sin(x\sqrt{-a}) + c_2 \cos(x\sqrt{-a})) \left(e^F [c_3 + 2a(c_1^2 + c_2^2) \int e^{2F} dt]^{-\frac{1}{2}} \right), & \\ F = a \int f(t) dt & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Tableau 1

La nature des solution des EDPs non linéaires (les types 2.1 et 2.2)

Equation	Structure de la solution	Références
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2$	$T = \varphi(x) + \psi(t), \quad T = \frac{a}{b} \ln u$ $u = \varphi(x) + \psi(t)$	[15]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	$T = \varphi(x) \psi(t)$	[2, 14]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda T} \frac{\partial T}{\partial x} \right)$	$T = \varphi(x) + \psi(t)$	[10, 13, 14]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT \ln T$	$T = \varphi(x) \psi(t)$	[7, 14]
$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) + aT \ln T$	$T = \varphi(x) \psi(t)$	[9, 14]
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = ae^T$	$T = -2 \ln u, u = \varphi(x) + \psi(t)$	[8]
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a \sinh T$	$T = 2 \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad u = \varphi(x) \psi(t)$	[4]
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a \ln T$	$T = e^u, \quad u = \varphi(x) + \psi(t)$	[4]
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = a \sin T$	$T = 4 \arctan u, \quad u = \varphi(x) \psi(t)$	[4]
$\frac{\partial}{\partial x} \left(ax^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(by^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) = aT^k$	$T = F(u), \quad u = \varphi(x) + \psi(t)$	[12]
$\frac{\partial}{\partial x} \left(ae^{\alpha x} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(be^{\beta y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = ce^{\gamma T}$	$T = F(u), \quad u = \varphi(x) + \psi(t)$	[12]
$\frac{\partial}{\partial x} \left(ax^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(be^{\beta y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = ce^{\gamma T}$	$T = F(u), \quad u = \varphi(x) + \psi(t)$	[12]
$\frac{\partial}{\partial x} \left(aT^n \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(bT^m \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$	$T = \varphi(x) \psi(t)$	[12]
$\frac{\partial}{\partial x} \left(ae^{\alpha x} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(be^{\beta y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0$	$T = \varphi(x) + \psi(t)$	[15]
$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ae^T$	$T = -2 \ln u, \quad u = \varphi(x) + \psi(t)$	[15]
$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sinh T$	$T = 2 \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad u = \varphi(x) \psi(t)$	[4]
$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + aT \ln T$	$T = e^u, \quad u = \varphi(x) + \psi(t)$	[4]
$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a \sin T$	$T = 4 \arctan u, \quad u = \varphi(x) \psi(t)$	[4]

telle que $a, b, c, k, m, n, \alpha, \beta, \gamma$ et λ sont des constantes

2.3 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(x)\psi_2(t) + \dots$

la forme contient plusieurs formes

2.3.1 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi(t) + \psi(t)\theta(x)$

Exemple 2.3.1.1

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = aT \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + c \quad (5)$$

La solution sous forme

$$T(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)\theta(x) \quad (6)$$

En remplaçant (6) dans (5) on obtient

$$(\varphi)'_t - c + (\psi)'_t \theta = a\varphi\psi(\theta)''_{xx} + \psi^2 \left[a\theta(\theta)''_{xx} + b((\theta)'_x)^2 \right]$$

On divise par ψ^2 et dérivé par rapport à t et x

$$\left(\frac{(\psi)'_t}{\psi^2} \right)'_t (\theta)'_x = a \left(\frac{\varphi}{\psi} \right)'_t (\theta)'''_{xxx}$$

Et il existe une constante C telle que

$$\begin{cases} (\theta)'''_{xxx} = c(\theta)'_x \\ \left(\frac{(\psi)'_t}{\psi^2} \right)'_t = ca \left(\frac{\varphi}{\psi} \right)'_t \end{cases} \quad c=\text{constante}$$

les fonctions φ et ϕ sont

$$\theta = \begin{cases} A_1 x^2 + A_2 x + A_3 & \text{si } c = 0 \\ A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 & \text{si } c = \lambda^2 > 0 \\ A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x + A_3 & \text{si } c = -\lambda^2 < 0 \end{cases}$$

telle que A_1, A_2 et A_3 sont des constantes

$$\begin{cases} \psi = \frac{B}{t + c_1}, \quad \varphi \text{ est quelconque} & \text{si } c = 0 \\ \varphi = B\psi + \frac{1}{aC} \frac{\psi'_t}{\psi}, \quad \psi(t) \text{ est quelconque} & \text{si } c \neq 0 \end{cases}$$

La solution est obtenue comme

$$T(x, t) = \begin{cases} \varphi + \frac{B}{t + c_1} (A_1 x^2 + A_2 x + A_3) & \text{si } C = 0 \\ B\psi + \frac{1}{a\lambda^2} \frac{\psi'_t}{\psi} + \psi (A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3) & \text{si } C = \lambda^2 > 0 \\ B\psi - \frac{1}{a\lambda^2} \frac{\psi'_t}{\psi} + \psi (A_1 \sin \lambda x + A_2 \cos \lambda x + A_3) & \text{si } C = -\lambda^2 < 0 \end{cases}$$

Exemple 2.3.1.2

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = v \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \quad (7)$$

La solution sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x) \theta(t) + \psi(t) \quad (8)$$

En remplaçant (8) dans (7) on obtient

$$\varphi'_t \theta'_x - \varphi \psi \theta''_{xx} + \varphi^2 \left[\left(\theta'_x \right)^2 - \theta \theta''_{xx} \right] - v \varphi \theta'''_{xxx} = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_1 = \varphi'_t, \quad \phi_2 = \varphi \psi, \quad \phi_3 = \varphi^2, \quad \phi_4 = v \varphi \\ \Psi_1 = \theta'_x, \quad \Psi_2 = -\theta''_{xx}, \quad \Psi_3 = \left(\theta'_x \right)^2 - \theta \theta''_{xx}, \quad \Psi_4 = \theta'''_{xxx} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'_t = A_1 \varphi^2 + A_2 v \varphi, \quad \varphi \psi = -A_3 \varphi^2 + A_4 v \varphi \\ \left(\theta'_x \right)^2 - \theta \theta''_{xx} = -A_1 \theta'_x + A_3 \theta''_{xx}, \quad \theta'''_{xxx} = A_2 \theta'_x - A_4 \theta''_{xx} \end{array} \right.$$

telle que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont des constantes.

Et on a

$$\theta'_x = B_1 \theta + B_2$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = B_3 \exp(B_1 x) - \frac{B_2}{B_1}, & \text{si } B_1 \neq 0 \\ \theta = B_2 x + B_3, & \text{si } B_1 = 0 \end{array} \right.$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi = \frac{A_2 v}{C \exp(-A_2 v t) - A_1} & \text{si } A_2 \neq 0 \\ \varphi = -\frac{1}{A_1 t + C} & \text{si } A_2 = 0 \end{array} \right. \quad \psi = A_3 \varphi + A_4 v$$

La solution est obtenue comme

$$T(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{A_2 v}{C \exp(-A_2 v t) - A_1} \right) \left(B_3 \exp(B_1 x) - \frac{B_2}{B_1} \right) + (A_3 \varphi + A_4 v) & \text{si } A_2 \neq 0 \text{ et } B_1 = 0 \\ \left(-\frac{1}{A_1 t + C} \right) (B_2 x + B_3) + (A_3 \varphi + A_4 v) & \text{si } A_2 = 0 \text{ et } B_1 = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.3.1.3

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \quad (9)$$

La solution sous forme

$$T(x, t) = x\psi(t) + \theta(t) \quad (10)$$

Et on a vue $\varphi_1(x) = x$ et $\varphi_2(x) = 1$ dans la forme 2.3

En remplaçant (10) dans (9) on obtient

$$x \left[\left(\psi'_t \right)^2 - \psi \psi''_{tt} - v \psi''_{tt} \right] + \left[\psi'_t \theta'_t - \psi \theta''_{tt} - v \theta'''_{ttt} \right] = 0$$

$$\begin{cases} \left(\psi'_t \right)^2 - \psi \psi''_{tt} - v \psi''_{tt} = 0 \\ \psi'_t \theta'_t - \psi \theta''_{tt} - v \theta'''_{ttt} = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\psi(t) = \frac{6v}{t + c_1}, \quad \theta(t) = \frac{c_2}{t + c_1} + \frac{c_3}{(t + c_1)^2} + c_4$$

La solution est obtenue comme

$$T(x, t) = x \frac{6v}{t + c_1} + \frac{c_2}{t + c_1} + \frac{c_3}{(t + c_1)^2} + c_4$$

telle que c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes.

2.3.2 La forme $T(x, t) = F(u)$ avec $u = \varphi(x)\psi(t) + \theta(x)$

Exemple 2.3.2.1

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = f(x) \frac{\partial^n T}{\partial t^n} \quad (11)$$

La solution sous forme

$$T(x, t) = \varphi(x)e^{\lambda t} + \theta(x) \quad (12)$$

Et on a regardé $\psi_1(t) = e^{\lambda t}$ et $\psi_2(t) = 1$ dans la forme 2.3

On remplace (12) dans (11) on obtient

$$\lambda^2 e^{\lambda t \varphi} \left[\theta'_x + \lambda^{n-2} f(x) \right] = 0$$

Donc $\theta(x) = -\lambda^{n-2} \int f(x) dx + c$, φ est quelconque.

La solution est obtenue comme

$$T(x, t) = \varphi(x)e^{\lambda t} - \lambda^{n-2} \int f(x) dx + c,$$

$c = \text{constante}$

Tableau 2

La nature des solution des EDPs non linéaires (le type **2.3**)

Equation	Structure de solution	Réfirénces
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT \frac{\partial T}{\partial x}$	$T = 1/u, \quad u = \varphi(x) \theta(t) + \psi(x)$	[10]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(\frac{\partial T}{\partial x})^2 + c_1 T + c_0$	$T = \varphi(t) x^2 + \psi(t) x + \chi(t)$	[12]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + b(\frac{\partial T}{\partial x})^2 + c_2 T^2 + c_1 T$	$T = \varphi(t) \theta(x) + \psi(x), \theta(x) = \begin{cases} e^{\lambda T} \\ \sin \lambda T \end{cases}$	[9]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (T^m \frac{\partial T}{\partial x})$	$T = u^{1/m}, \quad u = \varphi(t) x^2 + \psi(t)$	[13, 16]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (T^m \frac{\partial T}{\partial x}) + bT$	$T = u^{1/m}, \quad u = \varphi(t) x^2 + \psi(t)$	[2, 7]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (T^m \frac{\partial T}{\partial x}) + bT^{m+1}$	$T = u^{1/m}, \quad u = \varphi(t) \theta(x) + \psi(t)$	[14]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (T^m \frac{\partial T}{\partial x}) + bT^{1-m}$	$T = u^{1/m}, \quad u = \varphi(t) x^2 + \psi(t)$	[11]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (e^T \frac{\partial T}{\partial x}) + be^T + c$	$T = \ln u, \quad u = \varphi(t) \theta(x) + \psi(t)$ $\theta(x) = e^{\lambda x}$ $\theta(x) = \sin(\lambda x)$	[3]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} (e^T \frac{\partial T}{\partial x}) + ce^{-T} + b$	$T = \ln u,$ $u = \varphi(t) x^2 + \psi(t) x + \chi(t)$	[12]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + bT \ln T + bT$	$T = e^u, \quad u = \varphi(t) x^2 + \psi(t)$ $T = e^u, \quad u = \varphi(t) x + \psi(t)$	[12]
$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + T(a \ln^2 T + b \ln T + c)$	$T = e^u, \quad u = \varphi(t) \theta(x) + \psi(t),$ $\theta(x) = \begin{cases} e^{\lambda x} \\ \sin(\lambda x) \end{cases}$	[9]
$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \frac{\partial T}{\partial x}) + aT \ln T$	$T = e^u, \quad u = \varphi(t) x^2 + \psi(t)$	[14]

$a, b, c, c_0, c_1 c_2, m, n$ et λ sont des constantes.

Chapitre 3

Séparation des variables généralisée pour EDP non linéaire

Dans ce chapitre on va étudier deux formes de séparation des variable généralisée pour EDP non linéaire.

3.1 La forme $T(x, t) = g(x, t) F(u) + h(x, t)$

3.1.1 La forme $T(x, t) = g(t) F(u) + h(t), \quad u = \varphi(x) \theta(t) + \psi(t)$

Exemple 3.1.1.1

Soit l'équation non linéaire

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

On utilise la forme $T(x, t) = g(t) F(u) + h(t), \quad u = \varphi(x) \theta(t) + \psi(t)$ pour résoudre l'équation (1)

On calcule les dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = g'_t F + g F'_t \frac{\partial u}{\partial t} + h'_t \\ \frac{\partial T}{\partial x} = g F'_x \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = g F''_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + g F'_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (g F + h) [g F''_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + g F'_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] \end{array} \right.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a T \frac{\partial T}{\partial x} \right) = a \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + a T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Alors

$$\begin{aligned} g'_t F + g F'_t \frac{\partial u}{\partial t} + h'_t &= a (g F'_x \frac{\partial u}{\partial x})^2 + a (g F + h) [g F''_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + g F'_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}] \implies \\ g'_t F + g F'_t (\varphi \theta'_t + \psi'_t) + h'_t &= a g^2 \theta^2 (F'_x \varphi'_x)^2 + a (g F + h) [g F''_{xx} (\varphi'_x \theta)^2 + g F'_x \varphi''_{xx} \theta] \implies \\ g'_t F + g F'_t \varphi \theta'_t + g F'_t \psi'_t + h'_t &= a g^2 \theta^2 (F'_x \varphi'_x)^2 + a g F g F''_{xx} (\varphi'_x \theta)^2 + a g F g F'_x \varphi''_{xx} \theta + \\ h g F''_{xx} (\varphi'_x \theta)^2 + h g F'_x \varphi''_{xx} \theta &\implies \\ g'_t F + g F'_t \varphi \theta'_t + g F'_t \psi'_t + h'_t &= a g^2 \theta^2 (F'_x \varphi'_x)^2 + a g^2 \theta^2 F F''_{xx} (\varphi'_x)^2 + a g^2 \theta F F'_x \varphi''_{xx} + h g \theta^2 F''_{xx} (\varphi'_x)^2 + \\ h g \theta F'_x \varphi''_{xx} &\implies \\ a g^2 \theta^2 [(F'_x \varphi'_x)^2 + F F''_{xx} (\varphi'_x)^2] + a g^2 \theta F F'_x \varphi''_{xx} + h g \theta^2 F''_{xx} (\varphi'_x)^2 + h g \theta F'_x \varphi''_{xx} - g'_t F - g F'_t \varphi \theta'_t - \\ g F'_t \psi'_t - h'_t &= 0 \end{aligned}$$

En appliquant **le théorème (Forme bilinéaire)** et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(x) = (F'_x \varphi'_x)^2 + F F''_{xx} (\varphi'_x)^2, \quad \phi_2(x) = F F'_x \varphi''_{xx} \\ \phi_3(x) = F''_{xx} (\varphi'_x)^2, \quad \phi_4(x) = F'_x \varphi''_{xx}, \quad \phi_5(x) = F \\ \phi_6(x) = \varphi, \quad \phi_7(x) = 1 \\ \Psi_1(t) = a g^2 \theta^2, \quad \Psi_2(t) = a g^2 \theta \\ \Psi_3(t) = a h g \theta^2, \quad \Psi_4(t) = a h \theta, \\ \Psi_5(t) = g'_t, \quad \Psi_6(t) = g F'_t \theta'_t, \quad \Psi_7(t) = g F'_t \psi'_t - h'_t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (F'_x \varphi'_x)^2 + F F''_{xx} (\varphi'_x)^2 = A_2 F F'_x \varphi''_{xx} + A_3 F''_{xx} (\varphi'_x)^2 + A_4 F'_x \varphi''_{xx} + A_5 F + A_6 \varphi + A_7 \\ ag^2 \theta = -A_2 ag^2 \theta^2, \quad ahg \theta^2 = -A_3 ag^2 \theta, \\ ah \theta = -A_4 ag^2 \theta, \quad g'_t = A_5 ag^2 \theta, \\ g F'_t \theta'_t = A_6 ag^2 \theta, \quad g F'_t \psi'_t - h'_t = A_7 ag^2 \theta \end{array} \right. \quad (2)$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{-1}{A_2} \\ \frac{g'_t}{g^2} = A_5 a \theta \\ h = -A_4 g^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{-1}{A_2} \\ g = \frac{1}{\frac{-A_5 a}{A_2} t + c} \\ h = -A_4 \left(\frac{1}{\frac{-A_5 a}{A_2} t + c} \right)^2 \end{array} \right.$$

L'équation (2) est difficile à résoudre car elle est non linéaire.

Cas particulier :

Si $\varphi(x) = x$ et $\psi(t) = 0$ alors généralement on obtient des solutions auto-similaires.

$$T(x, t) = c(t) f\left(\frac{x}{a(t)}\right)$$

3.1.2 La forme $T(x, t) = g(x) F(u) + h(x)$, $u = \varphi(x) \theta(t) + \psi(x)$

On applique la forme dans l'équation suivante

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial T^2}{\partial x^2} + b T \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

En cherchant la solution de la forme

$$T(x, t) = g(x) F(u) + h(x) \quad u = \varphi(x) \theta(t) + \psi(x) \quad (3)$$

On calcule les dérivées partielles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = g \frac{\partial u}{\partial t} F'_t \\ \frac{\partial T}{\partial x} = g'_x F + g \frac{\partial u}{\partial x} F'_x + h'_x \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = g''_{xx} F + g'_x \frac{\partial u}{\partial x} F'_x + g'_x \frac{\partial u}{\partial x} F'_x + g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} F'_x + g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 F''_{xx} + h''_{xx} \end{array} \right.$$

On a

$$g \frac{\partial u}{\partial t} F'_t = a \left[g''_{xx} F + 2g'_x \frac{\partial u}{\partial x} F'_x + g \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} F'_x + g \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 F''_{xx} + h''_{xx} \right] + b \left((gF + h) \left[g'_x F + g \frac{\partial u}{\partial x} F'_x + h'_x \right] \right)$$

$$g \varphi \theta'_t F'_t = a g''_{xx} F + 2a g'_x \left(\varphi'_x \theta + \psi'_x \right) F'_x + a g \left(\varphi''_{xx} \theta + \psi''_{xx} \right) F'_x + a g \left(\varphi'_x \theta + \psi'_x \right)^2 F''_{xx} + a h''_{xx} + b g g'_x F^2 + b g^2 \left(\varphi'_x \theta + \psi'_x \right) F F'_x + b h g'_x F + b h g \left(\varphi'_x \theta + \psi'_x \right) F'_x + h h'_x$$

$$-g \varphi \theta'_t F'_t + a g \left(\varphi'_x \theta \right)^2 F''_{xx} + \theta (2a g'_x \varphi'_x F'_x + a g \varphi''_{xx} F'_x + 2a g \varphi'_x \psi'_x F''_{xx} + b g^2 \varphi'_x F F'_x + b h g \varphi'_x F'_x) + a g''_{xx} F + \psi'_x F'_x + a g \psi''_{xx} F'_x + \left(\psi'_x \right)^2 F''_{xx} + a h''_{xx} + b g g'_x F^2 + b g^2 \psi'_x F F'_x$$

$$+ b h g'_x F + h h'_x + b h g \psi'_x F'_x = 0$$

En appliquant **le théorème (Forme bilinéaire)** et on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l}
\phi_1(x) = g\varphi, \phi_2(x) = ag(\varphi'_x)^2 F''_{xx} \\
\phi_3(x) = 2ag'_x \varphi'_x F'_x + ag\varphi''_{xx} F'_x + 2ag\varphi'_x \psi'_x F''_{xx} + bg^2 \varphi'_x F F'_x + bhg\varphi'_x F'_x \\
\phi_4(x) = ag''_{xx} F + \psi'_x F'_x + ag\psi''_{xx} F'_x + (\psi'_x)^2 F''_{xx} + ah''_{xx} + bgg'_x F^2 + bg^2 \psi'_x F F'_x + bhg'_x F \\
\quad + hh'_x + bhg\psi'_x F'_x \\
\Psi_1(t) = -\theta'_t F'_t, \quad \Psi_2(t) = \theta^2, \quad \Psi_3(t) = \theta, \quad \Psi_4(t) = 1 \\
\\
\left\{ \begin{array}{l}
g\varphi = A_2 ag(\varphi'_x)^2 F''_{xx} + A_3 (2ag'_x \varphi'_x F'_x + ag\varphi''_{xx} F'_x + 2ag\varphi'_x \psi'_x F''_{xx} + bg^2 \varphi'_x F F'_x + bhg\varphi'_x F'_x) + \\
A_4 (ag''_{xx} F + \psi'_x F'_x + ag\psi''_{xx} F'_x + (\psi'_x)^2 F''_{xx} + ah''_{xx} + bgg'_x F^2 + bg^2 \psi'_x F F'_x \\
\quad + bhg'_x F + hh'_x + bhg\psi'_x F'_x) \\
\theta^2 = A_2 \theta'_t F'_t, \quad \theta = -A_3 \theta'_t F'_t, \quad 1 = -A_2 \theta'_t F'_t
\end{array} \right.
\end{array} \right.$$

On remarque que le système est très difficile à résoudre, il faut être résolu numériquement, qui est un travail qui dépasse largement le cadre du master.

Conclusion

On a proposé une méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaire. La méthode proposée s'appelle "séparation des variables". Elle est d'une grande utilité pour comprendre la nature des solutions d'EDPs et très courantes en pratique. Ce a permis de trouver plusieurs formes de solutions du cas simple au cas très complexe, le cas général représente des solutions de grandes importance en pratique, mais la résolution analytique est très difficile, donc elle est envisageable numériquement.

Bibliographie

- [1] A.POLYANIN AND A.ZHUROV.*Generalized Separation of Variables in Nonlinear Heat and Mass Transfer Equations*, J Non-Equilib Thermodyn. (2000) Vol. **25** pp. 251-267.
- [2] BARENBLATT,G.I, *Dimensional Analysis*,Gordon and Breach Publ,New York,1989.
- [3] BERMAN,V.S,VOSTOKOV,V.V,RYAZANTSEV,YU.S,*On multiplicity of steady-state regimes with a chemical reaction*, Izv. AN SSSR,Mekh.Zhidkosti i Gaza [Fluid Dynamics],3,(1982),171.
- [4] BULLOUGH,R.K,CAUDREY,P.J.*Eds.Solutions*,Springer-Verlag,Berlin,1980.
- [5] C&H/CRC.*hand book of linéaire partial differential equation for engineers and scientists,2002*.
- [6] D. ZWIELWIEL.*handbook of differential Equation 3 rd edition*,acadimic press,(1997).
- [7] DORODNITSYN,V.A,*On invariant solutions of a nonlinear heat equation with a source*,Zh.Vychisl.Mat.i Mat.Fiz,22(6),(1982),1393.
- [8] FRANK-KAMENETSKII,D.A,*Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics* [in Russian], Nauka, Moscow, 1987.
- [9] GALAKTIONOV,V.A,POSASHKOV,S.A,*On new exact solutions of parabolic equations with quadratic nonlinearities*,Zh.Vychisl. Mat. i Mat. Fiz,29(4),(1989),497.
- [10] IBRAGINOV,N.H,ED.*CRC Handbook of Lie Groups Applied to Differential Equations*, Vol.1, CRC Press, Boca Raton, 1994.

- [11] KERSNER, R. *On some properties of weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 32(3±4), (1978), 301.
- [12] POLYANIN, A. D., VYAZMIN, A. V., ZHUROV, A. I., KAZENIN, D. A. *Handbook of Exact Solutions of Heat and Mass Transfer Equations* [in Russian], Faktorial, Moscow, 1998..
- [13] OVSYANNIKOV, L. V, *Group Analysis of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1982.
- [14] SAMARSKII, A. A., GALAKTIONOV, V. A., KURDYUMOV, S. P., MIKHAILOV, A. P, *Peaking Regimes in Problems for Quasilinear Parabolic Equations* [in Russian], Nauka, Moscow, 1987.
- [15] ZAITSEV, V. F., POLYANIN, A. D. *Handbook of Partial Differential Equations : Exact Solutions* [in Russian], MP Obrazovaniya, Moscow, 1996.
- [16] ZELDOVICH, YA. B., BARENBLATT, G. I., LIBROVICH, V. B., MAKHVILADZE, G. M, *Mathematical Theory of Combustion and Explosion* [in Russian], Nauka, Moscow, 1980.